Logaritmo Complexo

Definição: Define-se o **logaritmo complexo com ramo** $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ como a função $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \log_{\mathbb{R}}|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z, \qquad \mathrm{Arg}\, z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[.$$

Chama-se **ramo principal do logaritmo complexo** à escolha do ramo $]-\pi, \pi]$.

Proposição:

- $e^{\log z} = z$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $\log(e^z) = z + 2\pi k\, i$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ dependente de z.

Proposição: Para $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log zw = \log z + \log w \qquad \text{(a menos de soma de } 2\pi k i\text{).}$$

Potências Complexas

Definição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$ define-se a **potência complexa** z^w como

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Esta definição depende do ramo do logaritmo complexo utilizado.

Proposição: Dados $z \neq 0, w \in \mathbb{C}$

- z^w toma um único valor, independentemente do ramo do logaritmo utilizado sse $w \in \mathbb{Z}$.
- Se $w \in \mathbb{Q}$, com $w = p/q$ na forma irredutível, então z^w toma $q \in \mathbb{N}$ valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.
- Se $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ então z^w toma infinitos valores diferentes consoante o ramo do logaritmo.

Função raíz índice-n

Definição: Define-se a função $\sqrt[n]{z}$ para $z \neq 0$ como

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log z}{n}},$$

assumindo uma escolha do ramo do logaritmo complexo. Designa-se pelo correspondente ramo da raíz.

Topologia em $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ é um espaço métrico com a distância dada por

$$d(z, w) = |z - w|$$

$\mathbb{C}$ é **isométrico** a $\mathbb{R}^2$

$$B_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \delta\}$$

Definição: Diz-se que $A \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto aberto**, se para qualquer $z \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset A$.
Chama-se **vizinhança aberta** de um ponto z a qualquer conjunto aberto que o contenha.

Proposição:

- Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ são abertos.
- Intersecções finitas de abertos são abertas.
- Reuniões arbitrárias de abertos são abertas.

Definição: Diz-se que $F \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto fechado**, se o complementar $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ é aberto.

Proposição:

- Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ são fechados.
- Reuniões finitas de fechados são fechadas.
- Intersecções arbitrárias de fechados são fechadas.

Definição:

- Diz-se que um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **limitado** se existe $M > 0$ tal que para todos $z \in \Omega$ se tem $|z| \leq M$. Ou seja, se $\Omega \subset B_M(0)$.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto fronteiro** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se, para todo o $\delta > 0$ se tem $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_\delta(z) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Designa-se por **fronteira** de Ω e representa-se $\partial\Omega$ o conjunto dos pontos fronteiros de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto interior** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset \Omega$. Designa-se por **interior** de Ω e representa-se $\operatorname{int}\Omega$ o conjunto dos pontos interiores de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto exterior** de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset \Omega^c$, ou seja, se $z \in \operatorname{int}\Omega^c$. Designa-se por **exterior** de Ω e representa-se $\operatorname{ext}\Omega$ o conjunto dos pontos exteriores de Ω.

- Diz-se que $z \in C$ é um **ponto aderente** a um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo o $\delta > 0$ se tem $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$. Designa-se por **aderência** ou **fecho** de Ω e representa-se $\overline{\Omega}$ o conjunto dos pontos aderentes a Ω.

- Diz-se que $\Omega \subset C$ é um **subconjunto denso** se $\overline{\Omega} = \mathbb{C}$.

Proposição:

- Dado qualquer conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tem-se que $\mathbb{C}$ é dado pela reunião disjunta $\mathbb{C} = \operatorname{int}\Omega \cup \partial\Omega \cup \operatorname{ext}\Omega$.
- Dado qualquer conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tem-se que $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = (\operatorname{ext}\Omega)^c$.
- $A \subset \mathbb{C}$ é aberto $\Leftrightarrow \operatorname{int} A = A \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$.
- $F \subset \mathbb{C}$ é fechado $\Leftrightarrow F = \overline{F} \Leftrightarrow \partial F \subset F$.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denso $\Leftrightarrow$ para todo o $\delta > 0$ e todo o $z \in \mathbb{C}$, tem-se $B_\delta(z) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Sucessões em $\mathbb{C}$

$$\{z_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

Definição: Diz-se que $L \in \mathbb{C}$ é o **limite da sucessão** $\{z_n\}$, ou que $\{z_n\}$ **converge para** $L \in \mathbb{C}$, e representa-se $\lim z_n = L$ ou $z_n \to L$, se qualquer que seja a bola centrada em L, $B_\delta(L)$ existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ os correspondentes termos da sucessão estão todos nessa bola, $z_n \in B_\delta(L)$. Ou seja,

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N \Rightarrow |z_n - L| < \delta,$$

ou ainda, no sentido de $\mathbb{R}$

$$d(z_n, L) = |z_n - L| \to 0.$$

Chama-se **sucessão convergente** a uma sucessão que tem limite complexo e sucessão **sucessão divergente** no caso contrário.

Proposição: Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos, $z_n = x_n + i\,y_n$ e $L = a + i\,b \in \mathbb{C}$. Então

$$z_n \to L \text{ em } \mathbb{C} \Leftrightarrow x_n \to a \quad \text{e} \quad y_n \to b \text{ em } \mathbb{R}.$$

Proposição: Toda a sucessão convergente é limitada e o limite é único.

Proposição: Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ sucessões complexas convergentes tais que $z_n \to z$ e $w_n \to w$. Então

- $z_n \pm w_n \to z \pm w$.
- $z_n w_n \to zw$.
- $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w} \qquad (w_n, w \neq 0)$.

Sucessões e Topologia

Proposição: Dado um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ um ponto z é aderente a Ω, ou seja, $z \in \overline{\Omega}$ se e só se existe uma sucessão $\{z_n\}$ de pontos em Ω, $z_n \in \Omega$, tal que $z_n \to z$.

Proposição: Um conjunto $F \subset \mathbb{C}$ é fechado se e só se qualquer sucessão convergente $\{z_n\}$ de pontos em F, $z_n \in F$, satisfaz $\lim z_n \in F$.

Limites infinitos

$$\lim z_n = \infty???$$

Definição: Diz-se que uma sucessão complexa $\{z_n\}$ tende para infinito, $\lim z_n = \infty$, se satisfaz

$$\forall_{R>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N \Rightarrow |z_n| > R.$$

Nesse sentido

$$\begin{aligned}
z + \infty &= \infty \\
z \cdot \infty &= \infty \qquad (z \neq 0) \\
\infty + \infty &= \infty \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\frac{z}{\infty} &= 0 \\
\frac{z}{0} &= \infty \qquad (z \neq 0)
\end{aligned}$$

mas

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

são **indeterminações**.

Completude

Definição: Diz-se que uma sucessão $\{z_n\}$ num espaço métrico é uma **sucessão de Cauchy** se satisfaz

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n.m > N \Rightarrow d(z_n, z_m) < \delta.$$

Diz-se que um espaço métrico é **completo** se todas as sucessões de Cauchy são convergentes.

Teorema (Bolzano-Weiertsrass): Toda a sucessão complexa $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, limitada, isto é, tal que existe um $M > 0$ para o qual $|z_n| \leq M$, tem pelo menos uma subsucessão convergente.

Teorema: O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos com a distância dada por $d(z, w) = |z - w|$ é um espaço métrico completo, ou seja, uma sucessão é convergente se e só se é de Cauchy.

Continuidade de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que f **é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(f(z_0))$$

ou

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} \forall_{z\in D_f} : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta$$

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que **f é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\}\subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$$

Teorema: As definições de continuidade à Heine e à Cauchy são equivalentes.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Então, f é contínua no ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$ se e só se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas no ponto $z_0 \in D_f \cap D_g$. Então, são contínuas em z_0 as funções

- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g} \qquad (g(z_0) \neq 0)$.

Se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em $f(z_0) \in D_h$ então também é contínua em z_0 a composta $h \circ f$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Então, f é contínua em $z_0 \in D_f$ se, qualquer que seja a vizinhança aberta A de $f(z_0)$, existe uma vizinhança aberta V_{z_0} de z_0 tal que

$$f(V_{z_0} \cap D_f) \subset A.$$

Mais geralmente, f é contínua em todos os pontos do seu domínio D_f se a pré-imagem $f^{-1}(A)$ de qualquer aberto A é a intersecção dum aberto O com o domínio

$$f^{-1}(A) = O \cap D_f.$$

Compacidade

Definição: Diz-se que um conjunto K é **compacto** se, qualquer que seja a cobertura de K por abertos

$$K \subset \cup_\alpha A_\alpha,$$

é possível reter apenas um número finito desses abertos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que ainda cobrem K (diz-se uma subcobertura finita)

$$K \subset \cup_1^m A_j.$$

Teorema (Heine-Borel): Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado. Isso é verdade em particular para subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, isométrico a $\mathbb{R}^2$.

Teorema: Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de K, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Teorema de Weierstrass): Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de K, então f tem máximo e mínimo.

Continuidade Uniforme

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que f **é uniformemente contínua em** D_f se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0}\forall_{z,w\in D_f} : |z-w| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \delta$$

Teorema (Heine-Cantor): Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de K, então f é uniformemente contínua em K.

Limites de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função** f **quando** z **tende para** z_0 **é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta > 0}\ \exists_{\varepsilon > 0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(L).$$

No caso de z_0 ou L serem infinitos, usam-se exteriores de bolas centradas na origem como vizinhanças de ∞, na definição anterior.

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função** f **quando** z **tende para** z_0 **é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\} \subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to L$$

Teorema: As definições de limite à Heine e à Cauchy são equivalentes e as mesmas que em $\mathbb{R}^2$. Quando existe, o limite é único.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto do domínio de f, $z_0 \in D_f$. Então o limite $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ existe se e só se f é contínua em z_0 e $L = f(z_0)$.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

e $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Então,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L = a + ib,$$

se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b,$$

no sentido de $\mathbb{R}^2$.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \overline{D_f} \cap \overline{D_g}$. Então, se existem os limites $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$, existem também

- $\lim_{z\to z_0} f \pm g = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{z\to z_0} f \cdot g = L_1 \cdot L_2$
- $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$,

com os cuidados devidos para as situações de limites infinitos e possíveis indeterminações.